§ 13. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

Формулы сложения и вычитания аргументов.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6)$$

Формулы (1)—(4) справедливы для любых α, β.

Формула (5) верна при α, β, $\alpha+\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Формула (6) верна при α, β, $\alpha-\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$.

Решение. Имеем $\sin 75° = \sin(30°+45°)$. Воспользовавшись формулой (3) при $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, получим

$$\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°.$$

Известно, что $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. п. 99). Значит, $\sin(30°+45°) =$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Итак, $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся для $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ формулами (3) и (1) и учтем, что $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} =$$

$$\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)+\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha+\sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha)} = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

П р и м е р 3. Вычислить $\cos 15°$.

Р е ш е н и е. Имеем $15° = 45° - 30°$. Воспользовавшись формулой (2) при $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, получим

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \\ + \sin 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

126. Формулы приведения. Под *формулами приведения* понимают обычно формулы, сводящие значение тригонометрической функции аргумента вида $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$, к функции аргумента α.

Пусть, например, нужно вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 1\cdot\cos\alpha + \\ + 0\cdot\sin\alpha = \cos\alpha.$$

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

127. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Если в формуле (2) из п. 125 положить $\alpha = \beta = t$, то получим

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \qquad (1)$$

откуда, в свою очередь, находим, что

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \qquad (2)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}. \qquad (3)$$

Тождество (2) справедливо при $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а тождество (3) — при $t \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Равенства (1), (2), (3) связывают между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента. Известны еще два равенства, связывающие между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \ \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Перемножая эти равенства, получаем равенство

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \qquad (4)$$

справедливое при $t \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е р 1. Известно, что $\sin t = -\frac{3}{5}$, причем $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

П р и м е р 2. Известно, что $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$, причем $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$.

Р е ш е н и е. Из формулы (3) находим $\sin^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}$.

Подставив вместо $\operatorname{ctg} t$ его значение, получим

$$\sin^2 t = \frac{1}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{25}{144}} = \frac{144}{169}.$$

П р и м е р 2. Известно, что $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$, причем $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$.

Р е ш е н и е. Из формулы (3) находим $\sin^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}$.

Подставив вместо $\operatorname{ctg} t$ его значение, получим

$$\sin^2 t = \frac{1}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{25}{144}} = \frac{144}{169}.$$

Итак, $\sin^2 t = \frac{144}{169}$. Значит, либо $\sin t = \frac{12}{13}$, либо $\sin t = -\frac{12}{13}$. По условию, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Значит, t принадлежит II четверти, а во II четверти синус положителен. Поэтому из двух указанных возможностей выбираем одну: $\sin t = \frac{12}{13}$.

Для отыскания значения $\cos t$ воспользуемся определением котангенса: $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$. Из этого равенства находим

$$\cos t = \operatorname{ctg} t \cdot \sin t = -\frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{5}{13}.$$

Осталось вычислить значение $\operatorname{tg} t$. Из равенства $\operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{ctg} t}$ находим, что $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$.

Итак,

$$\sin t = \frac{12}{13}, \quad \cos t = -\frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}.$$

128. Формулы двойного аргумента. Если в формулах (3), (1), (5) из п. 125 положить $\alpha = t$, $\beta = t$, то получим следующие тождества:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \qquad (1)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}. \qquad (3)$$

С помощью формул (1), (2) и (3) можно выразить синус, косинус, тангенс любого (допустимого) аргумента через тригонометрические функции вдвое меньшего аргумента. Например, справедливы следующие равенства:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin 5x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{5x}{2},$$

$$\cos 8t = \cos^2 4t - \sin^2 4t.$$

В ряде случаев полезным оказывается использование полученных формул «справа налево», т. е. замена выражения $2 \sin t \cos t$ выражением $\sin 2t$ (или выражения $\sin t \cos t$ — выражением $\frac{\sin 2t}{2}$), выражения $\cos^2 t - \sin^2 t$ — выражением $\cos 2t$ и, наконец, выражения $\frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$ — выражением $\operatorname{tg} 2t$.

Пример. Упростить выражение $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t$.

Решение. $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} =$

$$= \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin t \cos t} = -\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\frac{1}{2}\sin 2t} = -2\,\frac{\cos 2t}{\sin 2t} = -2 \operatorname{ctg} 2t.$$

129. Формулы понижения степени. Зная, что $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (см. п. 127), а $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ (см. п. 128), находим, что

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}; \qquad (1)$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}. \qquad (2)$$

П р и м е р 2. Вычислить $\sin^4 x + \cos^4 x$, если известно, что $\cos 2x = \frac{5}{13}$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись тем, что $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ и $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$, применим формулы понижения степени. Получим

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 =$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} = \frac{1+\frac{25}{169}}{2} = \frac{97}{169}.$$

130. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

131. Преобразование произведений тригонометрических функций в сумму.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (3)$$