гольник ABC_1 в плоскости α. Проведем высоту CD треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах отрезок C_1D — высота треугольника ABC_1. Угол CDC_1 равен углу φ между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекции α. Имеем

$$C_1D = CD\cos\varphi,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CD,\ S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB\cdot C_1D.$$

Отсюда

$$S_{ABC_1} = S_{ABC}\cos\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема верна. Теорема верна и в случае, когда вместо плоскости α взята любая параллельная ей плоскость. Действительно, при проектировании фигуры на параллельные плоскости ее проекции совмещаются параллельным переносом в направлении проектирования. А совмещаемые параллельным переносом фигуры равны.

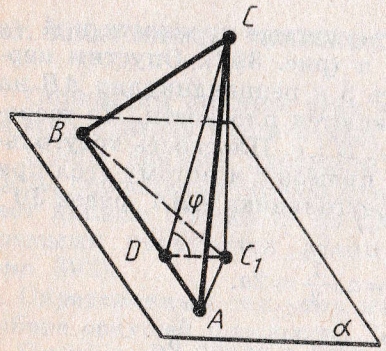

Рис. 394

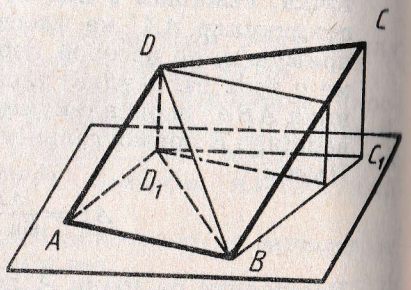

Рис. 395

Рассмотрим теперь общий случай. Разобьем данный многоугольник на треугольники. Каждый треугольник, у которого нет стороны, параллельной плоскости проекции, мы разобьем на два треугольника с общей стороной, параллельной плоскости проекции, как это показано для четырехугольника $ABCD$ на рисунке 395.

Теперь для каждого треугольника $\triangle$ нашего разбиения и его проекции $\triangle'$ запишем равенство $S_{\triangle'} = S_{\triangle}\cos\varphi$. Сложим все эти равенства почленно. Тогда получим слева площадь проекции многоугольника, а справа площадь самого многоугольника, умноженную на $\cos\varphi$. Теорема доказана.

164. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве, как и на плоскости, *вектором* называется направленный отрезок. Буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.

Координатами вектора с началом в точке $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2; y_2; z_2)$ называются числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Так же как и на плоскости, доказывается, что равные векторы имеют соответственно равные координаты и, обратно, векторы с соответственно равными координатами равны. Это дает основание для обозначения вектора его координатами: $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ или просто $(a_1; a_2; a_3)$.

З а д а ч а (50). Даны четыре точки $A(2; 7; -3)$, $B(1; 0; 3)$, $C(-3; -4; 5)$, $D(-2; 3; -1)$. Укажите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

Р е ш е н и е. Надо найти координаты указанных векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... и сравнить соответствующие координаты. У равных векторов соответствующие координаты равны. Например, у вектора $\overline{AB}$ координаты: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)=6$. У вектора $\overline{DC}$ такие же координаты: $-3-(-2)=-1$, $-4-3=-7$, $5-(-1)=6$. Таким образом, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ равны. Другой парой равных векторов будут $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$.

165. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Так же как и на плоскости, определяются действия над векторами: сложение, умножение на число и скалярное произведение.

Суммой векторов $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$ называется вектор $\bar{c}(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3)$.

Так же как и на плоскости, доказывается векторное равенство

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Произведением вектора $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\bar{a}=(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.

Так же как и на плоскости, доказывается, что абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\,|\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$.

Задача (54). Дан вектор $\bar{a}\,(1; 2; 3)$. Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке $A\,(1; 1; 1)$ и концом B на плоскости xy.

Решение. Координата z точки B равна нулю. Координаты вектора $\overline{AB}$: $x-1$, $y-1$, $0-1=-1$. Из коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\overline{AB}$ получаем пропорцию

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}.$$

Отсюда находим координаты x, y точки B:

$$x=\frac{2}{3},\quad y=\frac{1}{3}.$$

Скалярным произведением векторов $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $(b_1;\ b_2;\ b_3)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Буквально так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

Задача (59). Даны четыре точки $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$, $D\,(2;\ -3;\ 1)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение. Координатами вектора $\overline{AB}$ будут

$$1-0=1,\ -1-1=-2,\ 2-(-1)=3;$$
$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

Координатами вектора CD будут

$$2-3=-1,\ -3-1=-4,\ 1-0=1;$$
$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Значит,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\,|\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве.
2. Выразите расстояние между двумя точками через координаты этих точек.
3. Выведите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.

4. Что такое преобразование симметрии относительно точки? Какая фигура называется центрально-симметричной?
5. Объясните, что такое преобразование симметрии относительно плоскости. Что такое плоскость симметрии фигуры?
6. Какое преобразование фигуры называется движением?
7. Докажите, что движение в пространстве переводит плоскость в плоскость.
8. Какие фигуры в пространстве называются равными?
9. Дайте определение параллельного переноса.
10. Перечислите свойства параллельного переноса.
11. Докажите, что при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную плоскость.
12. Что такое преобразование подобия? Перечислите его свойства.
13. Какое преобразование называется гомотетией? Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя).
14. Дайте определение угла между скрещивающимися прямыми.
15. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
16. Дайте определение угла между плоскостями.
17. Докажите, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.
18. Что такое абсолютная величина вектора? Какие векторы называются одинаково направленными?
19. Дайте определение координат вектора с началом в точке $A_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке $A_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$.
20. Дайте определение действий над векторами: сложения, умножения на число, скалярного произведения.

ЗАДАЧИ

152

1. Где лежат те точки пространства, для которых координаты x и y равны нулю?
2. Даны точки $A\,(1; 2; 3)$, $B\,(0; 1; 2)$, $C\,(0; 0; 3)$, $D\,(1; 2; 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?
3. Дана точка $A\,(1; 2; 3)$. Найдите основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.

153

4. Найдите расстояния от точки $(1; 2; -3)$ до: 1) координатных плоскостей; 2) осей координат; 3) начала координат.