События

Всё, что происходит или не происходит в реальной действительности, называют явлениями или *событиями*. Практика показывает, что если некоторое событие происходит достаточно часто, то в его наступлении существует определённая закономерность.

Раздел математики, называемый *теорией вероятностей*, и занимается исследованием закономерностей в массовых явлениях.

Определение 1. Событие называют *случайным* по отношению к некоторому испытанию (опыту), если в ходе этого испытания оно может произойти, а может и не произойти.

Например, если испытание состоит в одном бросании игральной кости (кубика), то в ходе этого испытания возможны следующие события (*исходы* испытания): на верхней грани кости окажется число 1, число 2, ..., число 6. Каждое из этих событий является случайным, так как оно может произойти, а может и не произойти.

Случайные события обычно обозначаются начальными буквами латинского алфавита A, B, C и др.

Определение 2. Событие U называют *достоверным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие U обязательно произойдёт.

Например, достоверным событием будет появление одного из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игральной кости.

Если испытание заключается в извлечении одного шара из коробки, в которой лежат только белые шары, то извлечение белого шара будет достоверным событием.

Определение 3. Событие V называют *невозможным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие V заведомо не произойдёт.

Например, невозможным событием является выпадение числа 7 при бросании обычного игрального кубика.

Комбинации событий. Противоположное событие

Пусть в определенном испытании могут произойти события A и B. Рассмотрим некоторые комбинации этих событий.

Определение 1. *Суммой (объединением)* событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ (или $A \cup B$).

На рисунке 166 с помощью кругов Эйлера проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — событие $A + B$.

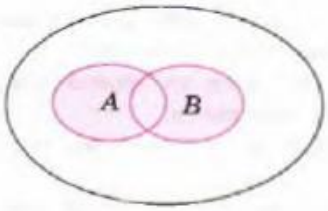

Рис. 166

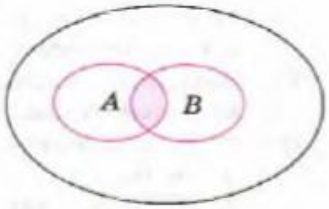

Рис. 167

Допустим, испытание состоит в определении числа на верхней грани игрального кубика после одного броска, при этом событие A — выпало чётное число, событие B — выпало число, кратное трём. Тогда событие $A + B$ состоит в том, что на верхней грани кубика появится либо чётное, либо кратное трём (либо чётное, кратное трём) число, т. е. событие $A + B$ означает, что появится одно из чисел 2, 3, 4, 6.

Определение 2. *Произведением* (*пересечением*) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).

Рисунок 167 иллюстрирует с помощью кругов Эйлера произведение событий A и B: закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие AB.

Например, если событие A — выпадение чётного числа, а событие B — выпадение числа, кратного 3, в результате одного броска игрального кубика, то событие AB — выпадение чётного числа, кратного 3 (такое число одно — это 6).

Задача 1 Из колоды карт наугад вынимают одну карту и рассматривают два события: A — вынута карта пиковой масти, B — вынут король. Описать события $A + B$ и AB.

Ответ Событие $A + B$ — вынута карта пиковой масти или вынут король; событие AB — из колоды вынут король пиковой масти.

Определение 3. События A и B называют *равными* (*равносильными*) и пишут $A = B$, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B.

Определение 4. Событие $\overline{A}$ называют *противоположным* событию A, если событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Вероятность события

Пусть событие A связано с испытанием, имеющим n равновозможных элементарных исходов. И пусть событие A наступает тогда, когда осуществляется любой из m каких-то элементарных исходов ($m \leqslant n$), и не наступает тогда, когда осуществляется любой из оставшихся $(n - m)$ исходов. Тогда говорят, что указанные m исходов, приводящие к событию A, *благоприятствуют* событию A.

Определение. *Вероятностью* $P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leqslant n. \qquad (1)$$

Заметим, что вероятность наступления каждого элементарного события в испытании с n равновозможными исходами равна $\frac{1}{n}$. Так, например, появление любого из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 после одного бросания игрального кубика имеет вероятность $\frac{1}{6}$.

Из формулы (1) следует, что

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

а также

$$P(V) = 0, \ P(U) = 1,$$

где V — невозможное событие; U — достоверное событие.

Задача 1 Бросают игральную кость. Найти вероятность события: 1) A_1 — выпало чётное число; 2) A_2 — выпало число, кратное 3.

▶ Число всех возможных элементарных исходов испытания $n = 6$.

1) Событию A_1 благоприятствуют 3 исхода (числа 2, 4 и 6), т. е. $m = 3$, поэтому $P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) Событию A_2 благоприятствуют 2 исхода (числа 3 и 6), т. е. $m = 2$, поэтому $P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. ◁

Задача 2 Бросают две монеты. Найти вероятность события A — хотя бы на одной монете выпал орёл.

▶ Обозначим появление орла на выпавшей монете буквой «О», а появление решки — буквой «Р». Тогда равновозможны следующие четыре ($n = 4$) элементарных исхода испытания: ОО, ОР, РО, РР (в каждой паре на первом месте записан результат появления орла или решки на первой монете, на втором месте — на второй монете). Событию A благоприятствуют первые 3 пары исходов ($m = 3$). Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Ответ $\frac{3}{4}$. ◁

Задача 3 Игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A — сумма выпавших очков не меньше 10.

▶ Результаты двух бросаний игральной кости — равновозможные упорядоченные пары чисел, выбираемых из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Согласно комбинаторному правилу произведения число таких пар равно $6 \cdot 6 = 36$. Событию A благоприятствуют следующие 6 пар: 4 и 6, 6 и 4, 5 и 5, 5 и 6, 6 и 5, 6 и 6. Таким образом, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ $\frac{1}{6}$. ◁

Задача 4 В ящике лежат 3 белых и 4 чёрных одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) A — оба вынутых шара белого цвета; 2) B — вынуты шары разного цвета.

▶ Общее число возможных исходов испытания $n = C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$.

1) Число благоприятствующих событию A исходов $m = C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

2) Так как любой из 3 белых шаров может комбинироваться с любым из 4 чёрных шаров, то по правилу произведения существует $3 \cdot 4 = 12$ пар из белого и чёрного шаров, т. е. $m = 12$. Таким образом, $P(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

Ответ 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{4}{7}$. ◁

Сложение вероятностей

Напомним, что сумма событий A и B — это событие $A + B$, состоящее в наступлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Например, если стрелок сделал 2 выстрела по мишени и событие A — попадание в мишень при первом выстреле, событие B — попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ — это попадание стрелком в мишень хотя бы при одном из выстрелов.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Задача 1 В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▶ I способ. Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A + B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{4}{9}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{7}{9}.$$

II способ. Пусть событие C — появление белого шара, тогда противоположное ему событие $\overline{C}$ — появление не белого (цветного) шара. Очевидно,

что $P(C)=\frac{2}{9}$, а согласно следствию из теоремы имеем

$$P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

Ответ $\frac{7}{9}$. ◁

Задача 2 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в мишень, равна 0,8. Какова вероятность того, что, выстрелив по мишени один раз, этот стрелок промахнётся?

▶ Если событие A — попадание в цель при одном выстреле, то по условию $P(A)=0{,}8$. Противоположное событию A событие $\overline{A}$ — промах, его вероятность $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}8=0{,}2$.

Ответ 0,2. ◁

Независимые события. Умножение вероятностей

Предположим, что из колоды в 36 карт извлекается одна карта и рассматриваются: событие A — извлечена карта трефовой масти, событие B — извлечена дама треф. Между событиями A и B очевидно наличие какой-то *зависимости*. Действительно, из 9 случаев, благоприятствующих событию A, событию B благоприятствует один; поэтому при наступлении события A вероятность события B равна $\frac{1}{9}$.

Но при отсутствии информации о наступлении события A вероятность события B оценивается как равная $\frac{1}{36}$. Так как $\frac{1}{9}>\frac{1}{36}$, то очевидно, что наступление события A повышает шансы события B. Существуют, однако, пары событий, для которых факт зависимости вероятности наступления одного из них от наступления другого не очевиден.

Определение. События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (1)$$

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A — на первой кости выпало 5 очков, B — на второй кости выпало 5 очков. Выясним, будут ли события A и B независимыми.

● Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A) не влияет на событие B и на его вероятность. И наоборот, наступление или не наступление события B не влияет на вероятность события A. Таким образом, $P(A)=\frac{1}{6}$ и $P(B)=\frac{1}{6}$.

Событие AB состоит в совместном наступлении событий A и B. Элементарные исходы испытания — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания $n=36$. Среди них присутствует лишь одна пара (5 и 5 очков), благоприятствующая событию AB, т. е. $m=1$. Таким образом, $P(AB)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)$, т. е. события A и B незави-

Задача 1 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(AB) = 0{,}1$;

2) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(AB) = \frac{2}{9}$.

▶ 1) Так как $P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 = P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{2}{9} = P(AB)$, то события A и B не являются независимыми. ◁

Задача 2 Пусть наугад называется одно из первых десяти натуральных чисел и рассматриваются события: A — названо чётное число, B — названо число, кратное пяти. Выяснить являются ли события A и B независимыми.

▶ Среди десяти чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10 чётных чисел 5, а кратных пяти — 2, поэтому $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Событие AB состоит в названии числа, кратного как числу 2, так и числу 5, т. е. числу 10. Среди первых десяти натуральных чисел таким является одно число 10, поэтому $P(AB) = \frac{1}{10}$. Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = P(AB)$, то события A и B являются независимыми. ◁

Задача 4 Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым орудием равна 0,8, а вторым орудием — 0,7. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним орудием, после того как они оба, стреляя по цели, сделали по одному выстрелу.

▶ Пусть событие A — попадание в цель хотя бы одним орудием, а противоположное ему событие $\overline{A}$ наступает при промахе как первого, так и второго орудия. Вероятность промаха первого орудия равна $1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность промаха второго равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Считая промахи орудий при стрельбе по цели независимыми событиями, находим $P(\overline{A}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$, значит, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Ответ 0,94. ◁